UPTET

उत्तर प्रदेश शिक्षक पात्रता परीक्षा

गणित

PAPER-II (कक्षा 6 से 8)

पाठ्यपुस्तक

AGRAWAL EXAMCART
Paper Pakka Fasega!

मुख्य विशेषताएँ

- पाठ्यक्रमानुसार सम्पूर्ण थ्योरी
- 2013-2020 के सभी प्रश्नों का व्याख्यात्मक हल सहित अध्यायवार संकलन

UPTET गणित Paper - II (कक्षा 6 से 8) पाठ्यपुस्तक

CB2121

AGRAWAL EXAMCART

About the Book

यह किताब खास तौर पर UPTET पेपर-II (कक्षा 6 से 8) की तैयारी के लिए तैयार की गई है। यह उन छात्रों के लिए एक उपयोगी संसाधन है जो उत्तर प्रदेश में सरकारी स्कूल में शिक्षक बनने का सपना देखते हैं।

पुस्तक की मुख्य विशेषताएँ:

- यह किताब UPTET के नए सिलेबस और परीक्षा पैटर्न पर आधारित है, जिससे आपको ताज़ा और सही जानकारी मिलती है।
- इसमें सभी विषयों का सिद्धांत (थ्योरी) आसान और सरल भाषा में समझाया गया है, जिससे कठिन टॉपिक भी आसानी से समझ में आते हैं।
- हर चैप्टर को साफ-सुथरे और छात्र-हितैषी तरीके से प्रस्तुत किया गया है, जिससे आपकी समझ और बेस मज़बूत होता है।
- इसमें 2013 से 2020 तक के पिछले वर्षों के प्रश्न (PYQs) दिए गए हैं, जिनके विस्तृत हल भी समझाए गए हैं। इससे आप परीक्षा के पैटर्न और उत्तर के लॉजिक को अच्छे से समझ सकते हैं।
- PYQs को चैप्टर वाइज ढंग से दिया गया है, जिससे रिवीजन आसान होता है और आप अपनी तैयारी को बेहतर तरीके से ट्रैक कर सकते हैं।
- यह किताब सिलेबस की तैयारी और परीक्षा के अभ्यास दोनों के लिए बेहतरीन है। यह स्व-अध्ययन (self-study) और आखिरी समय की तैयारी के लिए एकदम उपयुक्त है।
- चाहे आप अभी तैयारी शुरू कर रहे हों या परीक्षा से पहले रिवीजन कर रहे हों, यह किताब आपके आत्मविश्वास और प्रदर्शन को बढ़ाने में मदद करेगी।

यह किताब आपकी UPTET में अच्छी तैयारी और अच्छे अंक लाने में मदद करेगी, और आपको सरकारी शिक्षक बनने के सपने के और करीब ले जाएगी। यह सिर्फ एक पाठ्यपुस्तक नहीं है — यह आपकी UPTET सफलता की स्मार्ट तैयारी की साथी है।

अन्य महत्वपूर्ण पुस्तकें

Buy books at great discounts on: www.examcart.in | www.amazon.in/examcart |

AGRAWAL EXAMCART
Paper Pakka Fasega!

CB2121

UPTET गणित Paper - II (कक्षा 6 से 8) पाठ्यपुस्तक
ISBN - 978-93-6890-757-2
₹ 249

Code	Price	Pages	ISBN
CB2121	₹249	296	978-93-6890-757-2

विषय सूची

परीक्षा से सम्बन्धित जानकारी (Exam Information)

➔ **परीक्षा से सम्बन्धित महत्वपूर्ण सूचना (Important Information)** vi
(UPTET परीक्षा की सम्पूर्ण जानकारी एवं पुस्तक या किसी भी समस्या के लिए हमारा Helpline No.)

➔ **पाठ्यक्रम** vii

➔ **विश्लेषण चार्ट** viii
(विगत वर्ष के पेपर में कितने प्रश्न हर विषय के अध्याय से पूछे गये, उस का चार्ट)

गणित

1. संख्या पद्धति (Number System)	1-15
2. लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक (L.C.M. and H.C.F.)	16-25
3. वर्ग-वर्गमूल एवं घन-घनमूल (Square-Square Root and Cube-Cube Root)	26-34
4. भिन्न एवं दशमलव संख्याएँ (Fractions and Decimal Numbers)	35-47
5. घातांक और करणी (Indices and Surds)	48-55
6. बीजगणित (Algebra)	56-68
7. समीकरण एवं सर्वसमिकाएँ (Equations and Identities)	69-82
8. ज्यामिति (Geometry)	83-105
9. वृत्त (Circle)	106-120
10. अनुपात और समानुपात (Ratio and Proportion)	121-130
11. प्रतिशतता (Percentage)	131-136
12. लाभ और हानि (Profit and Loss)	137-146
13. साधारण ब्याज (Simple Interest)	147-154
14. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)	155-163
15. कार्य और समय (Work and Time)	164-174
16. समय और दूरी (Time and Distance)	175-183
17. बैंकिंग एवं वित्तीय सेवाएँ (Banking and Financial Services)	184-192
18. कार्तीय तल (Cartesian Plane)	193-198
19. सांख्यिकी (Statistics)	199-217
20. क्षेत्रमिति (Mensuration)	218-230
21. समुच्चय (Sets)	231-234
22. त्रिकोणमिती (Trigonometry)	235-245
23. क्रमचय-संचय और प्रायिकता (Permutation-Combination and Probability)	246-252
24. गणित शिक्षण भाग-1 (Mathematics Teaching Part-1)	253-271
25. गणित शिक्षण भाग-2 (Mathematics Teaching Part-2)	272-288

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री ई-बुक
(Extra Study Material E-Book)

Extra Study Material ई-बुक का Content

- 5 प्रैक्टिस सेट्स की ई-बुक
- डिस्काउंट कूपन दिया गया है। उसका उपयोग करें और 'www.examcart.in' से हमारी किताबें सबसे अच्छे डिस्काउंट पर खरीदें।

नोट : **Link Expire** होने से पहले दिए गए **QR Code** को स्कैन करके आप यह **Extra Study Material E-Book** को **Download** कर लें।

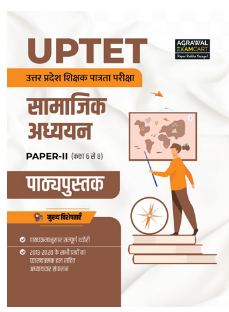
ऐसी पुस्तकें जो कोई आपको बताना नहीं चाहता!

इन अनोखी पुस्तकों ने कई छात्रों को उनके पहले प्रयास में ही परीक्षा पास करने में मदद की है और हम जो कहते हैं, उसे साबित भी करते हैं—इसीलिए हर पुस्तक के कुछ सैंपल चैप्टर दिए गए हैं। हम गारंटी देते हैं कि इन्हें पढ़ने के बाद आपको समझ आएगा कि ये पुस्तकें क्यों सबसे बेहतरीन हैं और क्यों इतने सारे छात्र इनसे सफल हुए हैं।

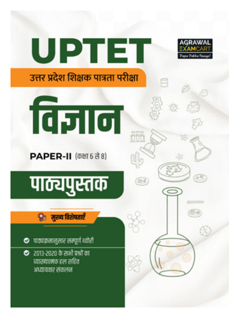
नोट

पढ़ने के लिए, किसी भी पुस्तक के पास दिए गए **QR Code** को स्कैन करें, उसके वेबसाइट पेज पर **"View PDF"** पर क्लिक करें। अगर पुस्तक पसंद आए, तो **Extra Study Material** ई-बुक में दिया गया डिस्काउंट कूपन इस्तेमाल करें और बेहतरीन डिस्काउंट भी पाएँ!

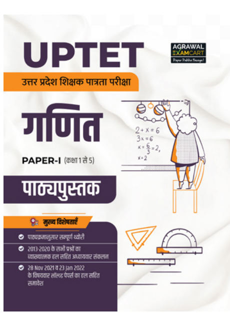
UPTET Class 1-5 (Guide Book)



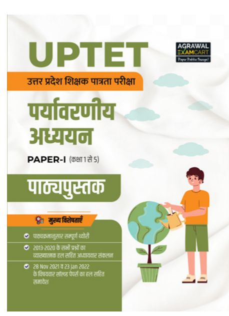
UPTET Class 6-8 सामाजिक अध्ययन (Textbook)



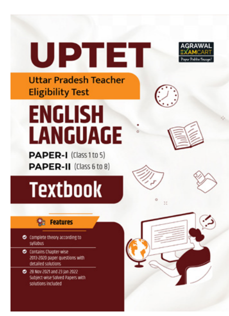
UPTET Class 6-8 विज्ञान (Textbook)



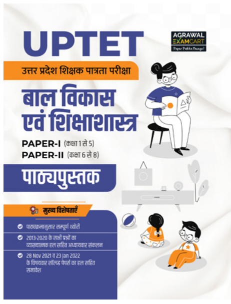
UPTET Class 1-5 गणित (Textbook)



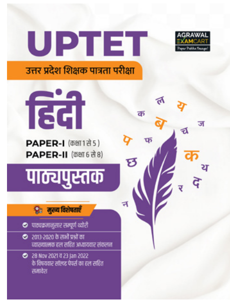
UPTET Class 1-5 पर्यावरणीय अध्ययन (Textbook)



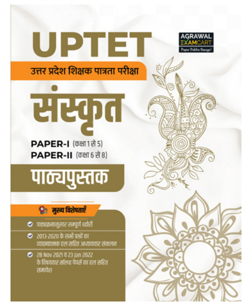
UPTET Class 1-5 & 6-8 English Language (Textbook)



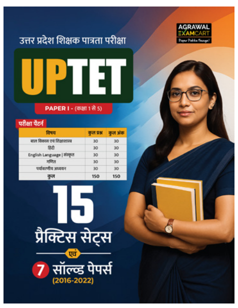
UPTET
Class 1-5 & 6-8
बाल विकास एवं शिक्षाशास्त्र
(Textbook)



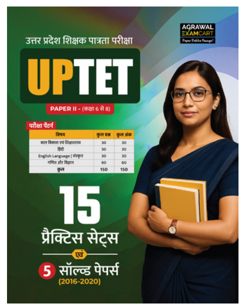
UPTET
Class 1-5 & 6-8
हिंदी
(Textbook)



UPTET
Class 1-5 & 6-8
संस्कृत
(Textbook)



UPTET
Class 1-5
(Practice Sets
& Solved Papers)



UPTET Class 6-8
गणित एवं विज्ञान
(Practice Sets
& Solved Papers)

UPTET Class 6-8
सामाजिक अध्ययन
(Practice Sets
& Solved Papers)

अध्याय
1

संख्या पद्धति (Number System)

संख्याएँ (Numbers)

I. अंक (Digits)–0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, तथा 9 को गणित में अंकों की परिभाषा दी गई है। इन अंकों के द्वारा विभिन्न संख्याओं का निर्माण किया जाता है। जैसे–10, 123, 456, 789 इत्यादि।

II. संख्यांक प्रणाली (Number System)–संख्यांक प्रणाली में मुख्यतः दो प्रकार की प्रणाली निहित होती है–(i) दाशमिक अंकन प्रणाली, (ii) रोमन अंकन प्रणाली।

(i) दाशमिक अंकन प्रणाली (Decimal Number System)–0 से 9 अर्थात् दस अंकों के होने के कारण इसे दाशमिक अंकन प्रणाली कहा जाता है। इस प्रणाली में संख्याओं को दो प्रकार से लिखा और पढ़ा जाता है–(i) भारतीय संख्या प्रणाली, (ii) अन्तर्राष्ट्रीय संख्या प्रणाली।

भारतीय संख्या प्रणाली के अन्तर्गत संख्याओं को उनके स्थानीय मानों के अनुरूप पढ़ा और लिखा जाता है। इन संख्याओं को नीचे दी गई तालिका के अनुसार पढ़ा जाता है।

दस करोड़	करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	$10^0=1$

उदा. : संख्या 51, 45, 42, 786 को इकयावन करोड़, पैंतालीस लाख, बयालीस हजार सात सौ छियासी पढ़ा जाता है।

1 दहाई = 10 इकाइयाँ
1 सैकड़ा = 10 दहाइयाँ
= 100 इकाइयाँ
1 हजार = 10 सैकड़ा
= 100 दहाइयाँ
1 लाख = 100 हजार
= 1000 सैकड़ा
1 करोड़ = 100 लाख
= 10,000 हजार

अन्तर्राष्ट्रीय संख्या प्रणाली के अन्तर्गत सभी संख्याओं को निम्नलिखित तालिका के अनुसार पढ़ा और लिखा जाता है।

दस मिलियन	एक मिलियन	सौ हजार	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	$10^0=1$

उदा. : संख्या 14, 542, 786 को अन्तर्राष्ट्रीय संख्या प्रणाली में चौदह मिलियन पाँच सौ बयालीस हजार सात सौ छियासी पढ़ा जाता है।

	करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
1 4 5 4 2 7 8 6	1	4	5	4	2	7	8	6
	दस मिलियन	मिलियन	सौ हजार	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

(ii) रोमन अंकन प्रणाली (Roman Number System)–इस प्रणाली में संख्या लैटिन वर्णमाला के अक्षरों के संयोजन द्वारा दर्शायी जाती है। वर्तमान में उपयोग किये जाने वाले रोमन अंक, सात प्रतीकों पर आधारित हैं।

रोमन प्रणाली	I	V	X	L	C	D	M
हिन्दू अरेबिक प्रणाली	1	5	10	50	100	500	1000

उदा. : 25 को XXV तथा 101 को CI लिखा जाता है।

(i) किसी भी संकेत की पुनरावृत्ति होने पर वह जितनी बार आता है उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है।

(ii) किसी भी संकेत की पुनरावृत्ति तीन से अधिक बार नहीं की जाती है। संकेत V, L व D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(iii) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के दाईं ओर लग जाता है तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है।

(iv) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के बाईं ओर लग जाता है तो बड़े मान में छोटे मान को घटा दिया जाता है।

(v) संकेत V, L और D के मानों को कभी भी घटाया नहीं जाता है। संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M व C में से ही घटाया जा सकता है।

सबसे बड़ी संख्याएँ एवं छोटी संख्याएँ–

इकाई–अंक 0 से 9 तक इकाई अंक होते हैं। सबसे छोटी तथा सबसे बड़ी 1–अंक की संख्या क्रमशः 0 तथा 9 है।

दहाई–10 से 99 तक की संख्याएँ दहाई वाली संख्याएँ होती हैं। संख्या 10, 2–अंकों की सबसे छोटी तथा 99, 2–अंकों की सबसे बड़ी संख्या है।

सैकड़ा–100 से 999 तक की संख्याएँ सैकड़े वाली संख्याएँ होती हैं। 3–अंकों की सबसे छोटी एवं सबसे बड़ी संख्या क्रमशः 100 तथा 999 है।

हजार–1,000 से 9999 तक की संख्याएँ हजार वाली संख्याएँ होती हैं जहाँ, 1000 सबसे छोटी 4-अंकों की संख्या तथा 9,999, 4-अंकों की सबसे बड़ी संख्या है।

दस हजार–10,000 से 99,999 तक की संख्याओं में 10,000 सबसे छोटी 5-अंकों की संख्या तथा 99,999, 5-अंकों की सबसे बड़ी संख्या है।

लाख—1,00,000 से 9,99,999 तक की संख्याएँ लाख वाली संख्याएँ होती हैं। 6 अंकों की सबसे छोटी तथा सबसे बड़ी संख्या क्रमशः 1,00,000 तथा 9,99,999 है।

दस लाख—10,00,000 से 99,99,999 तक की संख्याएँ दस लाख वाली संख्याएँ हैं। 7-अंकों की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या क्रमशः 99,99,999 तथा 10,00,000 है।

1 करोड़—8 अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9,99,99,999 तथा सबसे छोटी संख्या 1,00,00,000 है।

अंकों के मान—

स्थानीय मान—दी गई संख्या में किसी अंक का मान उसके स्थानीय मान तथा स्वयं के गुणनफल से प्राप्त मान होता है। जैसे—संख्या 4,89,765 में 6 का स्थानीय मान $6 \times 10 = 60$ होगा, जहाँ 6 को उसके स्थानीय मान अर्थात् दहाई स्थान (10) से गुणा किया गया है। इसी प्रकार उपरोक्त संख्या में 8 का स्थानीय मान 80,000 तथा 4 का स्थानीय मान 4,00,000 होता है।

वास्तविक मान—किसी संख्या में अंक का वास्तविक मान स्वयं संख्या होती है। जैसे—संख्या 59,438 में 9 का वास्तविक मान 9 ही होता है।

नोट—यदि दो अंकों x तथा y से बनी एक संख्या $10x + y$ है, तो x दहाई का अंक तथा y इकाई का अंक होता है।

संख्याओं की तुलना

(i) संख्याओं की तुलना जिनमें अंकों की संख्या बराबर नहीं हो—अधिक अंकों वाली संख्या कम अंकों वाली संख्या से बड़ी होती है अथवा कम अंकों वाली संख्या अधिक अंकों वाली संख्या से छोटी होती है।

(ii) संख्याओं की तुलना जिनमें अंकों की संख्या बराबर हो—आठ अंकों वाली संख्याओं में बायें से दायें क्रमशः करोड़, दस लाख, लाख, दस हजार, हजार, सैकड़ा, दहाई, इकाई के स्थानों पर लिखे अंकों की तुलना के आधार पर छोटी अथवा बड़ी संख्या ज्ञात करते हैं।

उदा. 1. : 54,29,683 और 54,29,684 में दस लाख, लाख, दस हजार, हजार, सैकड़ा, दहाई के स्थानों पर लिखे अंक समान हैं तथा इकाई के स्थान पर लिखे अंकों में $3 < 4$ अथवा $4 > 3$ है। अतः

54,29,683 < 54,29,684 अथवा 54,29,684 > 54,29,683

उदा. 2. : 5403100, 2560860, 14580872, 1450378 को आरोही क्रम में लिखिये।

हल : दी गई संख्याओं को छोटे से बड़े क्रम में रखने पर इनका आरोही क्रम = 1450378, 2560860, 5403100, 14580872

उदा. 3. : 1329543, 2329543, 13295406, 329543 को अवरोही क्रम में लिखिये।

हल : दी गई संख्याओं को बड़े से छोटे क्रम में रखने पर इनका अवरोही क्रम = 13295406, 2329543, 1329543, 329543

संख्याओं का वर्गीकरण (Kinds of Numbers)

दशमलव संख्या पद्धति (Decimal System) में संख्याओं को 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 आदि अंकों के प्रयोग द्वारा निरूपित किया जाता है। संख्याओं को उनके गुणों के आधार पर अलग-अलग समूह में वर्गीकृत किया गया है।

I. प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers)— ये संख्याएँ 1 से प्रारम्भ होती हैं और अनन्त तक जाती हैं। इनके समूह को N से दर्शाते हैं।

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$$

II. पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers)—जब प्राकृत संख्याओं में शून्य को शामिल किया जाता है तो पूर्ण संख्याएँ बन जाती हैं।

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$$

III. सम संख्याएँ (Even Numbers)—वे संख्याएँ जो 2 से भाज्य होती हैं, सम संख्याएँ कहलाती हैं।

$$E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$$

IV. विषम संख्याएँ (Odd Numbers)—वे संख्याएँ जो 2 से भाज्य नहीं होती हैं, विषम संख्याएँ कहलाती हैं।

$$O = \{1, 3, 5, 7, ...\}$$

V. पूर्णांक संख्याएँ (Integers)—धनात्मक व ऋणात्मक चिह्न वाली संख्याओं को पूर्णांक संख्याएँ कहते हैं।

$$I = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$$

VI. अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers)—1 से बड़ी उन सभी प्राकृत संख्याओं का समूह जिसमें उस संख्या तथा 1 को छोड़कर अन्य किसी भी संख्या से भाग देने पर वह पूर्णतः विभाजित न हो सके। '2' एक मात्र ऐसी संख्या है जो सम भी है और रूढ़ भी है।

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$$

VII. परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)—वे संख्याएँ जिनको p/q के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ p और q कोई ऐसी संख्याएँ हैं जो कि अभाज्य हैं तथा $q \neq 0$ है। इनके समूह को परिमेय संख्या (Rational Number) कहा जाता है।

$$R = \left\{.......\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -4, 0, 4, \frac{7}{5}\right\}$$

VIII. अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)—वे संख्याएँ जिनको p/q के रूप में लिखना सम्भव न हो, ऐसी संख्याओं के समूह को अपरिमेय संख्या कहते हैं। यहाँ भी p व q परस्पर अभाज्य संख्याएँ होंगी तथा $q \neq 0$ होगा।

$$L = \{.......\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}.........\}$$

IX. सह अभाज्य संख्या (Co-prime Numbers)—यदि दो प्राकृतिक संख्याओं का म.स.प. 1 हो, अर्थात् 1 के अलावा कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, तो वे संख्याएँ सह–अभाजय संख्याएँ कहलाती हैं।

उदा. : (2, 3), (4, 5), (5, 9), (13, 14), (15, 16) आदि।

X. पूर्ववर्ती संख्या (Predecessor Number)—किसी भी संख्या के पहले आने वाली संख्या उस मूल संख्या की पूर्ववर्ती संख्या कहलाती है।

उदा. : 2014 की पूर्ववर्ती संख्या $= 2014 - 1 = 2013$

XI. परवर्ती संख्या (Successor Number)—किसी भी संख्या के बाद में आने वाली संख्या उस मूल संख्या की परवर्ती संख्या कहलाती है।

उदा. : 2019 की परवर्ती संख्या $= 2019 + 1 = 2020$

संख्याओं का सन्निकट मान

दैनिक जीवन में विशेष परिस्थितियों में संख्याओं के आकलन पर केवल अनुमानित मान प्रयोग किये जाते हैं। जैसे—राशन के मासिक व्यय का अनुमान, शादी में निमंत्रण पत्रों की संख्या का अनुमान, किसी व्यक्ति की उम्र का अनुमानित मान इत्यादि। इस अनुमानित मान को ही संख्याओं का सन्निकट मान कहा जाता है।

संख्याओं में सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए संख्याओं के स्थानीय मान को आधार माना जाता है। कुछ स्थानीय मानों के सन्निकट मान विभिन्न प्रकार से ज्ञात किये जाते हैं।

(i) दहाई तक सन्निकट मान ज्ञात करना—संख्या का दहाई तक सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए इकाई के अंक का आकलन करते हैं। यदि इकाई का अंक 1, 2, 3 और 4 है, तो वह शून्य के अधिक निकट माना जाता है। यदि इकाई का अंक 5 या उससे अधिक है, तो दहाई के अंक में 1 अंक की वृद्धि हो जाती है तथा इकाई अंक शून्य हो जाता है।

उदा. : संख्या 9537 का दहाई अंक तक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई संख्या का दहाई अंक तक सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए इकाई अंक का आकलन किया जाता है। यहाँ, चूँकि इकाई अंक 7 है, इसीलिए संख्या में इकाई अंक शून्य तथा दहाई अंक में 1 अंक की वृद्धि होती है। अतः संख्या 9537 का दहाई अंक तक सन्निकट मान 9540 होगा।

(ii) सैकड़ा तक सन्निकट मान ज्ञात करना—संख्या का सैकड़ा तक सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए दहाई के अंक का आंकलन करते हैं। यदि दहाई का अंक 1, 2, 3 और 4 है, तो वह शून्य के अधिक निकट माना जाता है। यदि दहाई का अंक 5 या उससे अधिक है, तो सैकड़ा के अंक में 1 अंक की वृद्धि हो जाती है तथा दहाई अंक शून्य हो जाता है।

उदा. : संख्या 7351 का सैकड़ा अंक तक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई संख्या का सैकड़ा अंक तक सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए दहाई अंक का आकलन किया जाता है। यहाँ, चूँकि दहाई अंक 5 है, इसीलिए संख्या में दहाई और इकाई अंकों के स्थान पर शून्य तथा सैकड़ा अंक में 1 अंक की वृद्धि होती है। अतः संख्या 7351 का सैकड़ा अंक तक सन्निकट मान 7400 होगा।

(iii) हजार तक सन्निकट मान ज्ञात करना—संख्या का हजार तक सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए सैकड़ा अंक का आकलन करते हैं। यदि सैकड़ा का अंक 1, 2, 3 और 4 है, तो वह शून्य के अधिक निकट माना जाता है। यदि सैकड़ा का अंक 5 या उससे अधिक है, तो हजार के अंक में 1 अंक की वृद्धि हो जाती है तथा सैकड़ा अंक शून्य हो जाता है।

उदा. : संख्या 53458 का हजार अंक तक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि संख्या में सैकड़ा अंक 4 है, इसीलिए सैकड़ा, दहाई और इकाई अंकों के स्थान पर शून्य तथा हजार का अंक यथावत् ही रहता है। अतः संख्या 53458 का हजार अंक तक सन्निकट मान 53000 होगा।

पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers)

प्राकृत संख्याएँ शून्य के साथ मिलकर पूर्ण संख्याओं का निर्माण करती हैं। जब पूर्ण संख्याओं पर संक्रियायें (जोड़–घटाव, गुणा, भाग) प्रयोग की जाती हैं तो अनेक गुणों का पता चलता हैं।

पूर्ण संख्याओं के गुण

(i) प्राकृत संख्याओं के सभी गुण पूर्ण संख्याओं के लिए सत्य हैं।

(ii) सबसे छोटी पूर्ण संख्या शून्य (0) है।

पूर्ण संख्याओं के गुणधर्म

(i) संवृत गुण—यदि a तथा b दो पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a + b$ तथा $a*b$ पूर्ण संख्याएँ होंगी।

उदा. : $4 + 5 = 9$, एक पूर्ण संख्या

$4 \times 5 = 20$, एक पूर्ण संख्या

$4 - 5 = -1$, एक पूर्ण संख्या नहीं है।

$4 \div 5 = \frac{4}{5}$, एक पूर्ण संख्या नहीं है।

अतः पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाने) तथा भाग के अन्तर्गत संवृत नहीं होती हैं।

(ii) क्रमविनिमय गुण—पूर्ण संख्याओं के लिए, योग तथा गुणन दोनों ही क्रमविनिमय हैं।

उदा. : $4 + 5 = 9 = 5 + 4$

$7 \times 6 = 42 = 6 \times 7$

परन्तु, $7 - 4 = 3 \neq 4 - 7$

$6 \div 2 = 3 \neq 2 \div 6$

अतः क्रमविनिमय घटाव तथा भाग के लिए उपयोगी नहीं है।

(iii) साहचर्य गुण—पूर्ण संख्याओं के लिए योग तथा गुणन दोनों ही साहचर्य हैं।

उदा. : $4 + (5 + 6) = 4 + 11 = 15$

$(4 + 5) + 6 = 9 + 6 = 15$

$\therefore \quad 4 + (5 + 6) = (4 + 5) + 6$

(iv) वितरण या बंटन गुण—

उदा. : $4 \times (5 + 8) = 4 \times 5 + 4 \times 8$

$4 \times 13 = 20 + 32$

$52 = 52$

उदाहरण से स्पष्ट है कि इसे योग पर गुणन का वितरण गुण कहते हैं।

(v) तत्समक अवयव—

(i) योज्य तत्समक—'0' को योज्य तत्समक कहा जाता है, क्योंकि यह एक मात्र ऐसा अवयव है जिसको किसी संख्या के साथ जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

उदा. : $5 + 0 = 5$ तथा $7 + 0 = 7$ इत्यादि।

(ii) गुणनात्मक तत्समक—'1' को गुणनात्मक तत्समक कहा जाता है, क्योंकि यह एक मात्र ऐसा अवयव है जिसको किसी संख्या के साथ गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

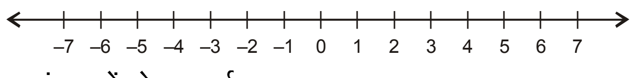
उदा. : $6 \times 1 = 6$ तथा $9 \times 1 = 9$ इत्यादि।

पूर्णांक

संख्या रेखा पर अंकित शून्य के दोनों ओर की समस्त ऋणात्मक संख्याओं तथा धनात्मक संख्याओं के समुच्चय को पूर्णांक कहते हैं।

उदा. : –5, – 4, – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 तथा 5 सभी पूर्णांक संख्याएँ हैं।

संख्या रेखा पर पूर्णांक संख्याओं को निम्नलिखित भाँति दर्शाया जाता है।



पूर्णांक संख्याओं के गुणधर्म

(i) योग के लिए संवृत गुणधर्म—किन्ही दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या ही होती है और हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याएँ योग के लिए संवृत होती हैं।

क्र.सं.	पूर्णांक 1	पूर्णांक 2	योगफल	योगफल पूर्णांक है/नहीं है
1.	+2	+5	+7	
2.	–3	+7		
3.	–4	+4		
4.	3	–5		

(ii) घटाव के अंतर्गत संवृत गुणधर्म–जब हम एक पूर्णांक में से दूसरे पूर्णांक को घटाते हैं तो उनका अंतर भी पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

	कथन	प्रेक्षण
1.	7 – 5 = 2	परिणाम एक पूर्णांक है।
2.	4 – 9 = –5	....
3.	(–4) – (–5) = ...	परिणाम एक पूर्णांक है।
4.	(–18) – (–18) = ...	....
5.	17 – 0 = ...	....

(iii) क्रमविनिमय गुणधर्म–हम जानते हैं कि 2 + 4 = 4 + 2 = 6 अर्थात् पूर्ण संख्याओं के योग में क्रम बदलने से परिणाम में कोई परिवर्तन नहीं आता है अतः क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन होता है।

व्यापक रूप में, दो पूर्णांकों a तथा b के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + b = b + a$$

(iv) साहचर्य गुणधर्म–पूर्णांकों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है। अर्थात्

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

(v) योज्य तत्समक–किसी भी पूर्णांक में 0 जोड़ने से योगफल वही पूर्णांक प्राप्त होता है अतः '0' पूर्णांकों के लिए योज्य तत्समक है।

पूर्णांकों का गुणन

(i) धनात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणन–

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$

इस विधि का उपयोग करते हुए हमने पाया कि धनात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है, परन्तु क्या होता है जब ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से गुणा करते हैं ?

$(-3) \times 4 = -12 = 3 \times (-4)$ इसी प्रकार हम $(-5) \times 3 = -15 = 3 \times (-5)$ भी प्राप्त कर सकते हैं।

(ii) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन–दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं तथा गुणनफल के पूर्व में (+) का चिह्न लगाते हैं।

उदाहरणत :–

$(-10) \times (-14) = 140, (-5) \times (-6) = 30$

व्यापक रूप में दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

(iii) शून्य से गुणन–किसी भी पूर्णांक को शून्य से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक a के लिए

$$\boxed{a \times 0 = 0 = 0 \times a}$$

अंकों के साथ खेलना (Play with digits)

संख्याओं के साथ खेलने से तात्पर्य यह है कि किसी भी व्यंजक में गणनात्मक सम्बन्ध को ध्यान में रखते हुये गणित की जानकारी में वृद्धि करना।

संख्याओं का विभाजकता नियम

2 से विभाजकता : यदि किसी संख्या का इकाई अंक 0, 2, 4, 6, 8 में से हो, तो वह संख्या 2 से विभाज्य होती है।

3 से विभाजकता : यदि किसी संख्या के सभी अंकों का योग, 3 से विभाज्य है, तो वह संख्या भी 3 से विभाजित होती है।

4 से विभाजकता : यदि किसी संख्या के अन्तिम दो अंकों का युग्म, 4 से विभाज्य है, तो वह संख्या भी 4 से विभाजित होती है।

5 से विभाजकता : यदि संख्या का इकाई अंक 0 अथवा 5 है, तो वह संख्या 5 से पूर्णतया विभाजित होती है।

6 से विभाजकता : यदि संख्या 2 तथा 3 से पूर्णतया विभाज्य है, तो वह संख्या 6 से भी पूर्णतया विभाजित होती है।

7 से विभाजकता : संख्या का इकाई अंक लेकर उसका दोगुना करें। प्राप्त संख्या को मूल संख्या के शेष अंकों में से घटायें। यदि प्राप्त नयी संख्या शून्य (0) अथवा 7 से विभाजित होने वाली संख्या है, तो मूल संख्या भी 7 से विभाजित होगी।

8 से विभाजकता : संख्या के अन्तिम तीन अंकों का युग्म, यदि 8 से विभाज्य है, तो वह संख्या भी 8 से विभाजित होगी।

9 से विभाजकता : यदि संख्या के सभी अंकों को योग, 9 से विभाजित है, तो वह संख्या भी 9 से विभाजित होगी।

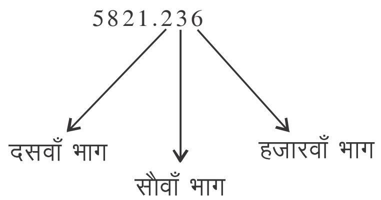
11 से विभाजकता : यदि संख्या में सम स्थानों पर अंकों के योग तथा विषम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर, 11 से विभाज्य है, तो संख्या भी 11 से विभाज्य होगी।

दशमलवीय स्थानीय मान (Decimal Place Value)

दशमलव वाली संख्याओं में दशमलव के बाद वाली संख्याओं को एक–एक अंक करके पढ़ा जाता है। दशमलव के बाद वाले अंक बायीं से दायीं ओर क्रमशः दसवाँ, सौवाँ, हजारवाँ, दस हजारवाँ आदि भाग होता है।

उदा. : 5821.236 में 3 के जातीय मान और स्थानीय मान का योगफल ज्ञात करो।

हल :



3 का जातीय मान = 3

3 का स्थानीय मान = 0.01

योगफल = 3 + 0.01

= 3.01

घात वाली संख्या का इकाई अंक ज्ञात करना (Finding the Unit Digit of a Powered Number)

I. यदि किसी संख्या में इकाई का अंक 0, 1, 5 या 6 है तो किसी भी घात पर इकाई का अंक अपरिवर्तित रहता है।

उदा. : $(2010)^{105}$ में इकाई का अंक = 0

$(2131)^{22}$ में इकाई का अंक = 1

$(1225)^{42}$ में इकाई का अंक = 5

$(1296)^{962}$ में इकाई का अंक = 6

II. यदि किसी संख्या में इकाई का अंक 4 या 9 है तब

(i) **विषम घात होने पर**—अभीष्ट संख्या का इकाई का अंक अपरिवर्तित होगा।

(ii) **सम घात होने पर**—अभीष्ट संख्या में इकाई का अंक क्रमशः 6 या 1 होगा।

उदा. : $(1914)^{216}$ में इकाई का अंक = 6

$(1914)^{213}$ में इकाई का अंक = 4

$(2019)^{216}$ में इकाई का अंक = 1

$(2019)^{2013}$ में इकाई का अंक = 9

III. यदि किसी संख्या में इकाई का अंक 2, 3, 7 या 8 है तो घात को 4 से भाग करो। शेषफल 1, 2, 3 या 4 होगा। (शून्य न लें) फिर इकाई के अंक को शेषफल के बराबर बार गुणा करें। प्राप्त संख्या का इकाई का अंक ही मूल संख्या का इकाई का अंक होगा।

उदा. 1 : $(4243)^{511}$ में 511 ÷ 4 करने पर शेषफल 3 होगा।

तब 3 को 3 बार गुणा करेंगे। $3^3 = 27$। अतः अभीष्ट इकाई का अंक 7 है।

उदा. 2 : $(1996)^{5212}$ में 5212 ÷ 4 करने पर शेषफल 4 (शून्य नहीं लेंगे) तब 6 को 4 बार गुणा करेंगे। $6^4 = 1296$। अतः अभीष्ट इकाई का अंक 6 है।

गुणा के प्रश्नों में इकाई का अंक ज्ञात करना (Finding the Unit digit in Multiplication Questions)

कुछ संख्याओं को गुणा करते हुए यदि इकाई का अंक ज्ञात करना हो, तो केवल इकाई के अंकों को गुणा करते रहें तथा प्रत्येक प्राप्त संख्या के दहाई के अंक को हटा दें। अंत में प्राप्त अंक ही अभीष्ट इकाई का अंक होगा।

उदा. : 468 × 26 × 1268 × 34683 में इकाई का अंक ज्ञात करो।

हल : 468 × 26 × 1268 × 34683

↓ ↓ ↓ ↓

8 × 6 × 8 × 3 (8 × 6 में इकाई का अंक = 8)

8 × 8 × 3 (8 × 8 में इकाई का अंक = 4)

4 × 3 (4 × 3 में इकाई का अंक = 2)

2

अतः अभीष्ट संख्या में इकाई का अंक 2 होगा।

लघुगुणक (Logarithm)

किसी एक संख्या का लघुगुणक वह घातांक होता है। जितनी बार हमें आधार को खुद से गुना करना हो, ताकि हमारी अपेक्षित संख्या आ सके। घातांक को कई बार घात भी कहा जाता है।

जैसे—यदि $a^y = x$ है, तो 'y' संख्या a के आधार के लिए x का लघुगुणक है।

$$a^y = x$$

$$y \log a = x$$

या $$y = \log a^x$$

लघुगुणक सूत्र—

$$\log e\,(xy) = \log e^x + \log e^y$$

$$\log e\left(\frac{x}{y}\right) = \log e^x - \log e^y$$

$$\log a^x = \frac{\log e^x}{\log e^a}$$

$$\log e^{x^n} = n \log e^x$$

द्विआधारी संख्या पद्धति (Binary Number System)

द्विआधारी संख्या पद्धति कुछ प्रमुख प्रचलित संख्या पद्धतियाँ हैं।

द्विआधारी का अर्थ 2 आधार वाला है, अर्थात् केवल दो अंकों (0 तथा 1) को काम में लाने वाली पद्धति है। इसमें संख्या का मान निकालने के लिए आधार (रेडिक्स 2) लिया जाता है। द्विआधारी संख्याओं को दशमलव संख्याओं में बदलने के गणितीय विधि होती है।

उदा. : $(1100)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 8 + 4 = (12)_{10}$

$(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (13)_{10}$

इसी प्रकार दशमलव संख्याओं को द्विआधारी संख्याओं में बदलने के लिए गणितीय विधि होती है।

उदा. : $(11)_{10}$ =

2	11	1
2	5	1
2	2	0
2	1	1

अतः $(11)_{10} = (1011)_2$

समान्तर श्रेणी (Arithmetic Progression)— समान्तर श्रेणी एक ऐसा अनुक्रम है जिसका प्रत्येक पद (प्रथम पद को छोड़कर) का उसके पूर्ववर्ती पद से अन्तर सदैव समान रहता हो :

अर्थात् $d = T_{n+1} - T_n$ (समान)

जैसेः 5, 10, 15, 20, ...

यहाँ $d = 10 - 5 = 15 - 10 = 20 - 15 = 5$ (समान)

समान्तर श्रेणी का मानक रूप (Standard form of Arithmetic Progression)–

यदि किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a, सार्वअन्तर d तथा अन्तिम पद T_n हो, तो श्रेणी का मानक रूप होगा :

$a, (a + d), (a + 2d)$ .... $[a + (n – 1) d] = T_n$

समान्तर श्रेणी का nवाँ पद (व्यापक पद)–

$T_n = a + (n – 1) d$ को समान्तर श्रेणी का व्यापक (nवाँ पद) कहते हैं।

समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल (Sum of first n terms of an A. P.)–

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1) d] \text{ या } S_n = \frac{n}{2}[a + T_n]$$

[जहाँ $T_n = a + (n – 1) d$]

को समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल कहते हैं।

दो राशियों के बीच समान्तर माध्य (Arithmetic mean of two numbers)– माना कि a तथा b दो राशियाँ हैं तथा उनके बीच का समान्तर माध्य A हो, तो :

$$\text{समान्तर माध्य } A = \frac{a+b}{2}$$

दो राशियों के बीच n समान्तर माध्य– माना कि दो राशियों a तथा b के बीच A_1 A_2 .... A_n समान्तर माध्य हैं, तब :

$$A_1 = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_n = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

गुणोत्तर श्रेणी (Geometric Progression)– जब किसी श्रेणी का प्रत्येक पद अपने पूर्व के पदों को एक नियत राशि का गुणा करने पर प्राप्त होता हो, तो वह श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है। इस नियत राशि को सार्वअनुपात r कहते हैं।

जैसे : 21, 63, 189 ....

गुणोत्तर श्रेणी का मानक रूप (Standard form of Geometric Progression)– यदि गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r हो, तो श्रेणी का मानक रूप होगा :

$$a, ar, ar^2 \text{ .... } ar^{n-1}$$

$$\text{यहाँ सार्वअनुपात } r = \frac{ar}{a} \text{ होगा।}$$

गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक पद (nवाँ पद)–

$$T_n = ar^{n-1}$$

गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)– यदि तीन राशियाँ a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो बीच की राशि b को गुणोत्तर माध्य कहते हैं। इनके बीच का सम्बन्ध निम्नानुसार होता है–

$$b^2 = ac \text{ या } b = \sqrt{ac}$$

यहाँ गुणोत्तर माध्य को G द्वारा दर्शाया जाता है।

अतः $\quad G = b = \sqrt{ac}$

दो राशियों के बीच n गुणोत्तर माध्य– यदि दो राशियों a तथा b के बीच G_1, G_2 .... G_n कुल n गुणोत्तर माध्य हों, तो :

$$G_1 = ar \qquad \text{जहाँ } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2 = ar^2$$

$$G_3 = ar^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$G_n = ar^n$$

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल–

(i) $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ जहाँ $r > 1$

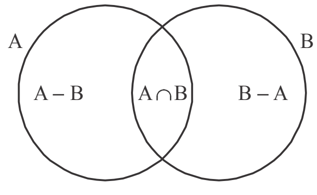
(ii) $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ जहाँ $r < 1$

गुणोत्तर श्रेणी के nवें पद के रूप में गुणोत्तर श्रेणी का योगफल–

$$S_n = \frac{T_n \cdot r - a}{r-1}$$

महत्वपूर्ण सूत्र (Important Formulae)

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
- $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- $(a + b)^2 + (a – b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 – (a – b)^2 = 4ab$
- $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$
- $(a – b)^3 = a^3 – b^3 – 3ab(a – b)$
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 – 3ab(a + b)$
- $a^3 – b^3 = (a – b)^3 + 3ab(a – b)$
- $a^3 + b^3 + c^3 – 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 – ab – bc – ca)$
- यदि $a + b + c = 0$ हो, तब $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$
- किन्हीं दो समुच्चय A तथा B के लिए सूत्र निम्नवत् है–



(i) $n(A – B) + n(A \cap B) = n(A)$

(ii) $n(B – A) + n(A \cap B) = n(B)$

(iii) $n(A \cup B) = n(A – B) + n(A \cap B) + n(B – A)$

(iv) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) – n(A \cap B)$

महत्वपूर्ण प्रकार (Short Tricks)

- **Type 1 :** जब कोई संख्या किसी अंक की 6 बार, 12 बार, 18 बार ....(6 के गुणज में) पुनरावृत्ति से बनी हुई हो, तो वह संख्या 3, 7, 11, 13 तथा 37 से पूर्णतः विभाजित होगी।

उदा. : संख्या 666666 की 7 से भाजकता की जाँच कीजिए।

हल : 66666 – 2 × 6 = 66666 – 12 = 66654

(यह 7 से पूर्णतः विभाजित है।)

अतः संख्या 666666 भी 7 से पूर्णतः विभाजित होगी।

- **Type 2 :** दो अंकों की संख्या और उसके अंकों को पलटने से बनी संख्या का योगफल सदैव 11 से विभाजित होगा। तब संख्या के अंकों का योगफल $= \frac{\text{संख्याओं का योग}}{11}$

उदा. : यदि दो अंकों की संख्या और उसके अंकों को पलटने से बनी संख्या का योगफल 88 हो, तो संख्या के अंकों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : संख्या के अंकों का योगफल $= \frac{\text{संख्याओं का योग}}{11}$

$$= \frac{88}{11} = 8$$

- **Type 3 :** दो अंकों की संख्या और उसके अंकों को पलटने से बनी संख्या में अन्तर सदैव 9 से विभाजित होता है। तब संख्या के अंकों का अन्तर $= \frac{\text{संख्याओं में अन्तर}}{9}$

उदा. : दो अंकों की संख्या और उनके अंकों को पलटने से बनी संख्या का अन्तर 54 है, तो उस संख्या के अंकों का अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल : संख्या के अंकों का अन्तर $= \frac{54}{9} = 6$

- **Type 4 :** यदि किसी घातीय रूप की संख्या में इकाई का अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो उसके हल की इकाई की संख्या भी वही रहती है।

उदा. : $(240)^5$ इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ 240 में इकाई का अंक 0 है।

अतः $(240)^5$ के हल का इकाई अंक भी 0 (शून्य) होगा।

- **Type 5 :** 1 से n तक की प्राकृतिक संख्याओं का योगफल $= \frac{n(n+1)}{2}$ है।

उदा. : प्रथम 25 प्राकृतिक संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट योगफल $= \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{25(25+1)}{2} \quad (\because n = 25)$$

$$= 25 \times 13 = 325$$

- **Type 6 :** लगातार n प्रथम प्राकृत संख्याओं में सम संख्याओं का योगफल $(s) = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$; जहाँ n सम संख्या है।

उदा. : प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं में सम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट योगफल $= \frac{n}{2}\left[\frac{n}{2}+1\right]$; n (सम संख्या)

$$= \frac{10}{2}\left[\frac{10}{2}+1\right]$$

$$= 5 \times 6 = 30$$

- **Type 7 :** प्रथम n प्राकृत संख्याओं में विषम संख्याओं का योगफल $(s) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$; जहाँ n विषम संख्या है।

उदा. : प्रथम 25 प्राकृत संख्याओं में विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट योगफल $= \left[\frac{n+1}{2}\right]^2$; n (विषम संख्या)

$$= \left[\frac{25+1}{2}\right]^2$$

$$= (13)^2 = 169$$

- **Type 8 :** प्रथम n सम संख्याओं का योगफल $= n(n+1)$

उदा. : प्रथम 10 सम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट योगफल $= n(n+1)$

$$= 10(10+1)$$

$$= 10 \times 11 = 110$$

- **Type 9 :** प्रथम n विषम संख्याओं का योगफल $= n^2$

उदा. : प्रथम 7 विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट योगफल $= n^2$

$$= (7)^2 = 49$$

- **Type 10 :** प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल

$$(s) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

उदा. : प्रथम 12 प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल क्या होगा?

हल : अभीष्ट योगफल $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{12(12+1)(2\times12+1)}{6}$

$= 2 \times 13 \times 25 = 650$

> **Type 11 :** 1 से n तक की सम संख्याओं के वर्गों का योग $= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

उदा. : $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 18^2 + 20^2$ का मान कितना होगा ?

हल : $n = 20$

अभीष्ट योगफल $= \dfrac{20(20+1)(20+2)}{6}$

$= \dfrac{20\times21\times22}{6} = 1540$

> **Type 12 :** 1 से n तक की विषम संख्याओं के वर्गों का योग $= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

उदा. : $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 19^2 + 21^2$ का मान कितना होगा ?

हल : $n = 21$

अभीष्ट योगफल $= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$= \dfrac{21\times22\times23}{6} = 1771$

> **Type 13 :** प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योगफल
>
> $(s) = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

उदा. : प्रथम 5 प्राकृत संख्याओं के घनों का योगफल कितना होगा?

हल : अभीष्ट योगफल $= \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$= \left[\dfrac{5\times(5+1)}{2}\right]^2$

$= (5 \times 3)^2 = (15)^2 = 225$

> **Type 14 :** प्रथम n, p के गुणजों का योगफल $(s) = \dfrac{pn(n+1)}{2}$

उदा. : 3 के प्रथम 5 गुणजों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट योगफल $= \dfrac{pn(n+1)}{2}$

यहाँ, $p = 3$ तथा $n = 5$ है। अतः

योगफल $= \dfrac{3\times5\times(5+1)}{2}$

$= 3 \times 5 \times 3 = 45$

> **Type 15 :** क्रमागत n प्राकृतिक संख्याओं, क्रमागत n सम संख्याओं, क्रमागत n विषम संख्याओं या क्रमागत n गुणजों से बनी एक शृंखला का योगफल $(s) = \dfrac{n}{2}$ [प्रथम संख्या + अंतिम संख्या]

उदा. : शृंखला 7, 14, 21, 28, 35 के पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट योगफल $= \dfrac{n}{2}$ [प्रथम संख्या + अंतिम संख्या]

यहाँ, $n = 5$, प्रथम संख्या = 7 और अंतिम संख्या = 35 है।

$\therefore$ योगफल $= \dfrac{5}{2}[7+35]$

$= \dfrac{5}{2}\times42$

$= 105$

> **Type 16 :** यदि तीन क्रमागत सम या विषम संख्याएँ $(x - 2)$, x तथा $(x + 2)$ हों तथा इनके वर्गों का योगफल (s) हो, तब बीच की संख्या
>
> $x = \sqrt{\dfrac{s-8}{3}}$

उदा. : यदि तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल 83 हो, तो बीच की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : योगफल = 83

$\therefore$ बीच की संख्या $= \sqrt{\dfrac{\text{योगफल}-8}{3}}$

$= \sqrt{\dfrac{83-8}{3}}$

$= \sqrt{25} = 5$

> **Type 17 :** यदि क्रमागत चार सम या विषम संख्याएँ क्रमशः $(x - 3)$, $(x - 1)$, $(x + 1)$ तथा $(x + 3)$ हों तथा इनके वर्गों का योगफल (s) हो, तब
>
> $x = \sqrt{\dfrac{s-20}{4}}$

उदा. : यदि 4 क्रमागत सम संख्याओं का योगफल 216 हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $s = 216$

माना, 4 क्रमागत सम संख्याएँ क्रमशः $(x - 3)$, $(x - 1)$, $(x + 1)$ तथा $(x + 3)$ हैं, तब

$x = \sqrt{\dfrac{s-20}{4}}$

$= \sqrt{\dfrac{216-20}{4}}$

$$= \sqrt{49} = 7$$

अतः संख्याएँ 4, 6, 8 तथा 10 होंगी।

Type 18 : यदि पाँच क्रमागत सम या विषम संख्याएँ क्रमशः $(x-4)$, $(x-2)$, x, $(x+2)$ तथा $(x+4)$ हों तथा इनके वर्गों का योगफल (s) हो, तब $x = \sqrt{\frac{s-40}{5}}$

उदा. : यदि 5 क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल 285 हो, तो बीच की संख्या का मान ज्ञात करो।

हल : यहाँ $s = 285$ और माना 5 क्रमागत विषम संख्याएँ क्रमशः $(x-4)$, $(x-2)$, x, $(x+2)$ तथा $(x+4)$ हैं, तब

$$x = \sqrt{\frac{s-40}{5}}$$

$$x = \sqrt{\frac{285-40}{5}}$$

$$x = \sqrt{49} = 7$$

अतः बीच की संख्या $= x = 7$

Type 19 : यदि तीन क्रमागत संख्याएँ क्रमशः $x-1$, x तथा $x+1$ हों तथा इनके वर्गों का योगफल (s) हो, तब $x = \sqrt{\frac{s-2}{3}}$

उदा. : यदि तीन क्रमागत संख्याओं के वर्गों का योगफल 14 हो, तब संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना, संख्याएँ $(x-1)$, x और $(x+1)$ हैं, तब

$$\therefore \quad x = \sqrt{\frac{s-2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{14-2}{3}}$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

अतः संख्याएँ क्रमशः 1, 2 व 3 होंगी।

Type 20 : n अंकों वाली कुल संख्याएँ $= 9 \times 10^{n-1}$

उदा. : 1 से लेकर 100 तक में दो अंकों वाली संख्याओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट संख्याएँ $= 9 \times 10^{n-1}$

$\because$ यहाँ $n = 2$

$\therefore$ संख्याएँ $= 9 \times 10^{(2-1)}$

$= 9 \times 10 = 90$

Type 21 : n सम या विषम होने पर $(x^n - 1)$ सदैव $(x-1)$ से भाज्य होती है।

उदा. : ज्ञात कीजिए कि क्या $(26^5 - 1)$, संख्या 25 से पूर्णतया विभाजित है?

हल :
$$\frac{26^5 - 1}{25} = \frac{(26^5 - 1)}{(26-1)}$$

अतः स्पष्ट है कि दी गई संख्या टाइप 21 के अनुसार, 25 से विभाजित होगी।

Type 22 : यदि n विषम हो तो $(x^n + 1)$ सदैव $(x+1)$ से भाज्य होती है।

उदा. : ज्ञात कीजिए कि क्या $(32^7 + 1)$, संख्या 33 से पूर्णतया विभाजित है?

हल :
$$\frac{32^7 + 1}{33} = \frac{32^7 + 1}{32 + 1};$$ जहाँ $n = 7$ (विषम संख्या)

अतः दी गई संख्या, 33 से पूर्णतया विभाजित होगी।

Type 23 : यदि तीन क्रमागत संख्याओं का योग X हो, तो

$$\text{मध्य संख्या} = \frac{X}{3}$$

उदा. : यदि तीन क्रमागत संख्याओं का योग 18 हो, तब मध्य संख्या क्या होगी?

हल : माना, तीन क्रमागत संख्याएँ $x-1$, x तथा $x+1$ हैं तथा योग $(X) = 18$ है, तब

$$\text{मध्य संख्या} = \frac{X}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Type 24 : यदि पिता की उम्र, बेटे की उम्र की N गुनी है तथा T वर्षों बाद, पिता की उम्र, बेटे की उम्र की M गुनी हो जाती है, तब बेटे की वर्तमान उम्र $= \frac{(M-1)}{(N-M)}T$

उदा. : यदि राजीव की उम्र, उसके बेटे की उम्र की तीन गुनी है तथा 5 वर्षों बाद, राजीव की उम्र, उसके बेटे की उम्र की दोगुनी रह जाती है, तो बेटे की वर्तमान उम्र क्या होगी?

हल :
$$\text{अभीष्ट उम्र} = \frac{2-1}{3-2} \times 5$$

$$= \frac{1}{1} \times 5 = 5 \text{ वर्ष}$$

Type 25 : यदि n_1 वर्ष पहले पिता की उम्र बेटे की उम्र की x गुनी थी तथा n_2 वर्ष बाद पिता की उम्र, बेटे की उम्र की y गुनी हो जाती है,

$$\text{तब बेटे की उम्र} = \frac{n_1(x-1) + n_2(y-1)}{(x-y)}$$

उदा. : यदि 3 वर्ष पहले अशोक की उम्र, तिलक की उम्र की 4 गुनी थी और 5 वर्ष बाद आलोक की उम्र, तिलक की उम्र की 2 गुनी हो जाती है, तो तिलक की उम्र ज्ञात कीजिए।

हल : तिलक की उम्र $= \dfrac{n_1(x-1)+n_2(y-1)}{(x-y)}$

$= \dfrac{3(4-1)+5(2-1)}{(4-2)}$

$= \dfrac{9+5}{2} = 7$ वर्ष

• **Type 26 :** यदि पिता तथा पुत्र की वर्तमान आयु में $a : b$ का अनुपात है तथा T वर्षों बाद या पहले यह अनुपात $m : n$ हो जाता है या था, तब

(i) पिता की आयु $= -\, a \dfrac{T(m-n)}{an-bm}$

(ii) पुत्र की आयु $= -\, b \dfrac{T(m-n)}{an-bm}$

यहाँ '+' चिह्न T वर्ष बाद के लिए तथा '–' चिह्न T वर्ष पहले के लिए प्रयुक्त किया गया है।

उदा. : यदि यश तथा युवान की वर्तमान आयु में 15 : 1 का अनुपात है और 6 वर्ष बाद यह अनुपात 9 : 2 हो जाता है, तो युवान की आयु ज्ञात कीजिए।

हल : युवान की आयु $= b \times \dfrac{T(m-n)}{an-bm}$

$= 1 \times \dfrac{6(9-2)}{15\times 2 - 1\times 9}$

$= \dfrac{6\times 7}{30-9}$

$= \dfrac{6\times 7}{21} = 2$ वर्ष

• **Type 27 :** (i) $(x^n - a^n)$, $(x - a)$ से विभाजित होगा, जहाँ $n \in N$
(ii) $(x^n - a^n)$, $(x + a)$ से विभाजित होगा, जहाँ $(n \in N : n/2)$
(iii) $(x^n - a^n)$, $(x + a)$ से विभाजित होगा, जहाँ n एक विषम संख्या है।

• **Type 28 :** (i) भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल
(ii) शेषफल = 1st शेषफल + 2nd शेषफल × 1st भाजक + 3rd शेषफल × 1st भाजक × दूसरा भाजक + ...

उदा. : $\dfrac{7856745}{9\ \ 8\ \ 6\ \ 5} = ?$

हल :

1st भाजक	9	7856745	शेषफल	
2nd भाजक	8	872971 →	6	1st
3rd भाजक	6	109121 →	3	2nd
4th भाजक	5	18186 →	5	3rd
		3637 →	1	4th

भागफल = 3637

अभीष्ट शेषफल $= R_1 + R_2 \times D_1 + R_3 \times D_1 \times D_2 + R_4 \times D_1 \times D_2 \times D_3$

$= 6 + 3 \times 9 + 5 \times 9 \times 8 + 1 \times 8 \times 6 \times 9$

$= 6 + 27 + 360 + 432$

$= 825$

• **Type 29 :** यदि किसी संख्या का गुणा 5^n से करना हो, तो संख्या के साथ n शून्य रखकर बनी नयी संख्या को 2^n से भाग देते हैं।

उदा. : $425 \times 5^4 = ?$

हल : $425 \times 5^4 = \dfrac{4250000}{2^4}$

$= \dfrac{4250000}{16} = 265625$

• **Type 30 :** यदि किसी समूह में n व्यक्ति हों और प्रत्येक व्यक्ति शेष व्यक्तियों को उपहार दे, तब उपहारों की कुल संख्या $= n(n-1)$

उदा. : नव वर्ष के अवसर पर किसी समुदाय के 12 व्यक्तियों ने एक–दूसरे को उपहार भेंट किए। तो बताइए कि कुल कितने उपहार बँटे?

हल : उपहारों की संख्या = 12 (12 – 1)

= 12 × 11 = 132

• **Type 31 :** जानवरों और पक्षियों पर आधारित प्रश्न।

उदा. : एक चिड़ियाघर में कुछ खरगोश और कबूतर हैं। यदि सिरों की कुल संख्या 90 और पैरों की कुल संख्या 224 है, तो कबूतरों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : शॉर्ट ट्रिक से,

जानवरों की संख्या $= \dfrac{\text{पैरों की कुल संख्या}}{2}$ – सिरों की कुल संख्या

$= \dfrac{224}{2} - 90$

$= 112 - 90 = 22$

∴ कबूतरों की कुल संख्या = 90 – 22 = 68

नोट : यहाँ जानवरों का अभिप्राय सामान्यतः चार पैरों वाले जानवरों से है।

• **Type 32 :** संख्या $N = a^p \times b^q \times c^r$ में अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या एवं कुल गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए, जहाँ a, b, c संख्या N के अभाज्य गुणनखण्ड हैं, तब

(i) गुणनखण्डों की कुल संख्या $= (p+1)(q+1)(r+1)$

(ii) अद्वितीय गुणनखण्डों की संख्या = 3

(iii) अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या $= p + q + r$

(iv) गुणनखण्डों का योगफल $= (a^0 + a^1 + a^2 + \ldots a^p)(b^0 + b^1 + \ldots b^q)(c^0 + c^1 + \ldots c^r)$

(v) गुणनखण्डों का गुणनफल $= (N)^{(\text{गुणनखण्डों की संख्या}/2)}$

उदा. : संख्या $(4)^{11} \times (7)^5 \times (11)$ में अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

$(4)^{11} \times (7)^5 \times (11)^1 = (2)^{22} \times (7)^5 \times (11)^1$

∴ कुल अभाज्य गुणनखण्ड = 22 + 5 + 1

= 28

UPTET (2013-2020) के पेपर्स में पूछे गये प्रश्न

1. कोई प्राकृतिक संख्या m के लिए, गुणनफल $m(m+2)(m+4)$ हमेशा विभाजित होगा–

UPTET 6-8, (08/01/2020)

(A) 3 से (B) 5 से
(C) 7 से (D) 2 से

1. (A) $m = 1$ रखने पर,

$m(m+2)(m+4) = 1 \times 3 \times 5 = 15$
3 से विभाज्य है

$m = 2$ रखने पर,

$m(m+2)(m+4) = 2 \times 4 \times 6 = 48$, 3 से विभाज्य है।

$m = 3$ रखने पर,

$m(m+2)(m+4) = 3 \times 5 \times 7 = 105$, 3 से विभाज्य है।

अतः $m(m+2)(m+4)$, 3 से विभाज्य है।

2. यदि दो धनात्मक संख्याओं का समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमशः 5 तथा 3 है, तो संख्याएँ ज्ञात करो–

UPTET 6-8, (08/01/2020)

(A) 9, 1 (B) 4, 16
(C) 4, 8 (D) 2, 4

2. (A) A. M = 5
G. M = 3
माना, दो संख्याएँ a तथा b हैं

तब $\frac{a+b}{2} = 5$

$a + b = 10$ ...(i)

तथा $\sqrt{ab} = 3$

$ab = 9$ ...(ii)

$\because (a-b) = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$

$(a-b) = \sqrt{(10)^2 - 4 \times 9}$

$(a-b) = 8$ ...(iii)

समी (i) तथा (iii) को हल करने पर,

$a = 9, \quad b = 1$

3. $(49)^{15} - 1$ किस संख्या से पूर्णतः विभाजित है?

(i) 50 (ii) 48
(iii) 29 (iv) 8
(A) (ii) और (iv) (B) (iii) और (iv)
(C) (i) और (iii) (D) (i) और (ii)

UPTET 6-8, (08/01/2020)

3. (A) $[(49)^{15} - 1]$, $(49 - 1 = 48)$ से पूर्णतः विभाजित होगा।

48 के गुणनखण्ड 1, 2, 4, 6, 8,12, 24 तथा 48 हैं।

अतः $[(49)^{15} - 1]$, 48 तथा 8 दोनों से विभाज्य है।

4. यदि 13^{50} को 14 से भाग दिया जाए, तो शेषफल है–

UPTET 6-8, (19/12/2016)

(A) 13 (B) 12
(C) 1 (D) – 1

4. (C) प्रश्न से, $\frac{a^n}{(a+1)}$ = शेषफल 1 देता है, जब n सम है।

= शेषफल a देता है, जब n विषम है।

तब $\frac{13^{50}}{14} = \frac{13^{50}}{(13+1)}$

यहाँ, $n = 50$ (सम)

$\therefore$ शेषफल = 1

5. यदि $a, a+2, a+4$ अविभाज्य संख्याएँ हों, तो a के कितने मान हैं ?

UPTET 6-8, (15/10/2017)

(A) एक
(B) दो
(C) तीन
(D) तीन से अधिक

5. (A) प्रश्न से, a, $a + 2$ तथा $a + 4$ अभाज्य संख्याएँ हैं।

यदि $a = 2$ (अभाज्य संख्या)

जहाँ, 2, 4, 6 सभी अभाज्य संख्याएँ नहीं हैं।

यदि $a = 3$ (अभाज्य संख्या)

जहाँ, 3, 5, 7 सभी अभाज्य संख्याएँ हैं।

यदि $a = 5$

जहाँ 5, 7, 9 सभी अभाज्य संख्याएँ नहीं हैं,

यदि $a = 7$

तब 7, 9, 11 सभी अभाज्य संख्याएँ नहीं हैं।

6. यदि $(29)^{75}$ को 28 से विभाजित किया जाए, तो शेषफल होगा–

UPTET 6-8, (02/02/2016)

(A) 0 (B) 1
(C) 29 (D) 7

6. (B) $29 = 28 \times 1 + 1 \Rightarrow$ शेषफल = 1

$29^2 = 841 = 29 \times 30 + 1$

$\Rightarrow$ शेषफल = 1

$29^3 = 24389 = 28 \times 871 + 1$

$\Rightarrow$ शेषफल = 1

उपर्युक्त उदाहरणों से देखने पर 29 के किसी भी घात में 28 से भाग देने पर शेषफल 1 आता है।

अतः $(29)^{75}$ में 28 से भाग देने पर शेषफल 1 आयेगा।

7. दो प्राकृतिक संख्याओं का अन्तर सदैव होता है–

UPTET 6-8, (02/02/2016)

(A) एक पूर्णांक
(B) एक प्राकृतिक संख्या
(C) एक सम्पूर्ण संख्या
(D) एक धनात्मक संख्या

7. (C) दो प्राकृतिक संख्याओं का अन्तर सदैव एक पूर्णांक होता है।

8. $\frac{519 \times 519 - 81 \times 81}{519 \times 519 + 2 \times 519 \times 81 + 81 \times 81}$ बराबर है–

UPTET 6-8, (02/02/2016)

(A) $\frac{73}{200}$ (B) $\frac{73}{100}$

(C) $\frac{100}{78}$ (D) $\frac{200}{73}$

8. (B) $\frac{519 \times 519 - 81 \times 81}{519 \times 519 + 2 \times 519 \times 81 + 81^2}$

$\frac{(519)^2 - (81)^2}{(519)^2 + (81)^2 + 2 \times 519 \times 81}$

$\frac{(519-81)(519+81)}{(519+81)^2}$

$[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$

$= \frac{519-81}{519+81}$

$= \frac{438}{600}$

$= \frac{73}{100}$

9. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$

$\ldots\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$ का मान होगा–

UPTET 6-8, (02/02/2016)

(A) $\frac{n}{n+1}$ (B) $\frac{1}{5n}$

(C) $\frac{1}{3n}$ (D) $\frac{1}{n}$

9. (D) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$

$\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-1}{n}$

$=\frac{1}{n}$

10. 2 + 22 + 222 + 2222 +........... का n पदों तक योग है–

UPTET 6-8, (27/06/2013)

(A) $\frac{2}{9}\left\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right\}$

(B) $\frac{9}{2}\left\{\frac{10}{9}(10^n-1)+n\right\}$

(C) $\frac{9}{2}\left\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n^2\right\}$

(D) $\frac{9}{2}\left\{\frac{10}{9}(10^n-1)+n^2\right\}$

10. (A) 2 + 22 + 222 + ... n पद

2(1 + 11 + 111 + ... n पद)

$=\frac{2}{9}$ (9 + 99 + 999 + ...n पद)

$=\frac{2}{9}$ [(10 – 1) + (100 – 1) + (1000 – 1) + ... n पद]

$=\frac{2}{9}$ [($10^1 + 10^2 + 10^3$ ... + n पद) – (1 + 1 + 1 + ... n पद)]

$=\frac{2}{9}\left[\frac{10(10n-1)}{10-1}-n\right]$

$\left[\because \text{गुणोत्तर श्रेणी के } n \text{ पदों का योगफल } S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\right]$

$=\frac{2}{9}\left[\frac{10}{9}(10n-1)-n\right]$

11. 100 और 200 के बीच आने वाली उन संख्याओं का योग जो 9 से विभाज्य हो, होगा–

UPTET 6-8, (27/06/2013)

(A) 1665 (B) 1674

(C) 1683 (D) 1692

11. (C) 100 और 200 के बीच 9 से विभाज्य संख्याएँ

= 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, 189, 198

अभीष्ट योग

= 108 + 117 + 126 + 135 + 144 + 153 + 162 + 171 + 180 + 189 + 196

यह एक समान्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद 108 तथा सार्वान्तर 9 है।

अतः योग

$=\frac{11}{2}$ [2 × 108 + (11 – 1) × 9]

$\left[\because S_n=\frac{n}{2}\left(2a+(n-1)d\right)\right]$

$=\frac{11}{2}$ × (216 + 90)

$=\frac{11}{2}$ × 306

= 11 × 153

= 1683

12. यदि $\log_{10}a+\log_{10}b=\log_{10}(a+b)$, तो a, b के मान निम्न तरह से सम्बन्धित हैं–

UPTET 6-8, (27/06/2013)

(A) $a=b=1$

(B) $a=b=3$

(C) $b=\frac{a}{1+a}$

(D) $a=\frac{b}{b-1}$

12. (D) दिया है

$\log_{10}a+\log_{10}b=\log_{10}(a+b)$

$\log_{10}.ab=\log_{10}(a+b)$

$ab=a+b$

$a=\frac{b}{b-1}$

13. एक कक्षा में 75% अंग्रेजी में, 60% गणित में उत्तीर्ण होते हैं और 20% दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण हो जाते हैं। उत्तीर्ण प्रतिशत है–

UPTET 6-8, (27/06/2013)

(A) 55% (B) 65%

(C) 67.5% (D) 68.2%

13. (A) अंग्रेजी में अनुत्तीर्ण प्रतिशत P(E)

= 100 – 75 = 25%

गणित में अनुत्तीर्ण प्रतिशत P(M)

= 100 – 60 = 40%

दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण $P(M\cap E)$

= 20%

किसी एक विषय में अनुत्तीर्ण $P(M\cup E)$

$= P(M) + P(E) - P(M\cap E)$

= 40 + 25 – 20

= 45%

अतः उत्तीर्ण प्रतिशत = 100 – 45

= 55%

14. $\frac{8.9\times8.9\times8.9-3.7\times3.7\times3.7}{8.9\times8.9+8.9\times3.7+3.7\times3.7}$

बराबर है–

UPTET 6-8, (27/06/2013)

(A) 1 (B) 5.2

(C) 12.6 (D) 8.9 × 3.7

14. (B) $\frac{8.9\times8.9\times8.9-3.7\times3.7\times3.7}{8.9\times8.9+8.9\times3.7+3.7\times3.7}$

$=\frac{(8.9)^3-(3.7)^3}{(8.9)^2+8.9\times3.7+(3.7)^2}$

$=\frac{(8.9-3.7)\left[(8.9)^2+8.9\times3.7+(3.7)^2\right]}{(8.9)^2+8.9\times3.7+(3.7)^2}$

[$\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$]

= 5.2

15. यदि $x = 22^3 + 144^3 - 166^3$, तो x अवश्य विभाज्य है–

UPTET 6-8, (27/06/2013)

(A) 7 और 12 दोनों से

(B) 11 और 13 दोनों से

(C) 11 और 23 दोनों से

(D) 12 और 83 दोनों से

15. (D) $x = 22^3 + 144^3 - 166^3$

$x = 22^3 + 144^3 - (144 + 22)^3$

$x = 22^3 + 144^3 - [(144)^3 + (22)^3 + 3 \times 144 \times 22\ (144 + 22)]$

$[\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)]$

$x = (22)^3 + (144)^3 - (144)^3 - (22)^3] - 3 \times 144 \times 22 \times 166$

$x = -66 \times 144 \times 166$

अतः x अवश्य ही 12 तथा 83 दोनों से विभाज्य है।

16. यदि $a * b = (a \times b) + b$ है, तो 5 * 7 बराबर है–

UPTET 6-8, (18/11/2018)

(A) 35 (B) 42

(C) 12 (D) 59

16. (B) $\because \quad a * b = (a \times b) + b$

$\therefore \quad 5 * 7 = (5 \times 7) + 7 = 35 + 7 = 42$

17. $\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)....\left(1-\frac{1}{100}\right)$ का मान है–

UPTET 6-8, (18/11/2018)

(A) $\frac{1}{25}$ (B) $\frac{1}{50}$

(C) 0 (D) $\frac{1}{100}$

17. (A) व्यंजक $= \left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)....\left(1-\frac{1}{100}\right)$

$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} .... \frac{99}{100}$

$= \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

18. यदि $0 < x < 1$ हो, तो यह सत्य है कि–

UPTET 6-8, (18/11/2018)

(A) $x^{100} > x^{101}$ (B) $x^{100} > 1$

(C) $x^{100} < x^{101}$ (D) $x^{101} > 1$

18. (A) दिया है, $0 < x < 1$

माना $x = \frac{1}{3}$, अब विकल्प (A) से,

$\left(\frac{1}{3}\right)^{100} > \left(\frac{1}{3}\right)^{101}$

$\frac{1}{3^{100}} > \frac{1}{3^{101}}$

$\frac{3^{101}}{3^{100}} > 1 \Rightarrow 3 > 1$

अतः विकल्प (A) में दिया गया सम्बन्ध सत्य है।

महत्त्वपूर्ण अभ्यास प्रश्न

1. 3 क्रमागत धनात्मक संख्याओं के वर्गों का योग 365 है। तद्नुसार उन संख्याओं का योग कितना है ?

(A) 30 (B) 33

(C) 36 (D) 45

2. भाग के एक प्रश्न में भाजक अपने भागफल का 10 गुना और शेषफल का 5 गुना है। तद्नुसार यदि शेषफल 46 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(A) 4236 (B) 4306

(C) 4336 (D) 5336

3. चार अभाज्य संख्याएँ आरोही क्रम में हैं। उनमें प्रथम तीन का गुणनफल 455 है और अन्तिम तीन का गुणनफल 1729 है। तद्नुसार उनमें सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

(A) 7 (B) 13

(C) 19 (D) 23

4. दो संख्याओं का योगफल और गुणनफल क्रमशः 5 तथा 6 है। तद्नुसार उनके वर्गों के व्युत्क्रमों का योगफल होगा :

(A) $\frac{13}{36}$ (B) $\frac{36}{13}$

(C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

5. ऐसी तीन क्रमिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनमें पहली का दोगुना, दूसरी का तीन गुना और तीसरी का चार गुना, जोड़ने पर 191 हो जाता है

(A) 19, 20, 21

(B) 21, 22, 23

(C) 20, 21, 22

(D) 22, 23, 24

6. एक कार्यालय में 108 मेजें और 132 कुर्सियाँ हैं। उनमें यदि $\frac{1}{6}$ मेजें और $\frac{1}{4}$ कुर्सियाँ टूट जायें, तो उस कार्यालय में प्रत्येक को मेज और एक कुर्सी की आवश्यकतानुसार, कितने लोग कार्य कर सकते हैं ?

(A) 86 (B) 90

(C) 92 (D) 99

7. संख्या 37 को दो ऐसे भागों में विभाजित कीजिए कि एक भाग के 5 गुने और दूसरे भाग के 11 गुने का योग 227 हो।

(A) 15, 22 (B) 20, 17

(C) 25, 12 (D) 30, 7

8. एक फौज में 12000 सिपाही हैं जिनमें से कुछ भारतीय तथा शेष यूरोपीय हैं। यूरोपीय सिपाही की औसत ऊँचाई 1.80 मी., भारतीय सिपाही की 1.75 मी. तथा सारी फौज की लम्बाई $1\frac{47}{60}$ मी. है, तो भारतीय सिपाही कितने हैं ?

(A) 6000 (B) 8000

(C) 1000 (D) 4000

9. दो संख्याओं का योगफल 8 है तथा उनका गुणनफल 15 है। उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा :

(A) $\frac{8}{15}$ (B) $\frac{15}{8}$

(C) 23 (D) 7

10. कितने $\frac{1}{6}$ मिलकर $41\frac{2}{3}$ के बराबर होते हैं ?

(A) 125 (B) 150

(C) 250 (D) 350

11. एक पिता की आयु का उसके पुत्र की आयु से अनुपात 5 : 2 है। यदि उनकी आयु का वर्षों में गुणनफल 1000 हो, तो 10 वर्ष के उपरांत पिता की आयु (वर्षों में) होगी :

(A) 50 (B) 60

(C) 80 (D) 100

12. 80 और 90 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं का गुणनफल है :

(A) 83

(B) 89

(C) 7387

(D) 598347

13. यदि 5 क्रमिक पूर्णांकों का योग S हो, तो उनमें सबसे बड़ा पूर्णांक S से किस रूप से सम्बन्धित होगा ?

(A) $\frac{S-10}{5}$ (B) $\frac{S+4}{4}$

(C) $\frac{S+5}{4}$ (D) $\frac{S+10}{5}$

14. यदि p तथा q दो आपेक्षित अभाज्य धनात्मक पूर्णांक हों और $p + q = 10, p < q$ हो, तो p के संभवतः कितने मान हो सकते हैं ?

(A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 1

15. $(122)^{173}$ के गुणनफल में एकक अंक क्या है ?

(A) 2 (B) 4
(C) 6 (D) 8

16. वह सबसे छोटी संख्या, जिसे 4 अंकों वाली सबसे बड़ी संख्या में जोड़ने पर योगफल 345 से विभाजित होता हो, होगी—

(A) 50 (B) 6
(C) 60 (D) 5

17. $(124)^{372} + (124)^{373}$ के योग में एकक अंक कौन-सा है ?

(A) 5 (B) 4
(C) 2 (D) 0

18. यदि $\frac{a}{b}$ तथा उसके व्युत्क्रम का योगफल 1 हो और $a \neq 0, b \neq 0$ हो, तो $a^3 + b^3$ का मान क्या होगा ?

(A) 2 (B) –1
(C) 0 (D) 1

19. $16 \times 12 - 672 \div 21 = ? - 211$

(A) 381 (B) 347
(C) 372 (D) 371

20. $916 \times ? \times 3 = 214344$

(A) 78 (B) 68
(C) 84 (D) 66

21. $999\frac{995}{999} \times 999$ का मान है :

(A) 990809 (B) 998996
(C) 999824 (D) 998999

22. यदि $a \times b = a + b + \frac{a}{b}$ हो, तो 9×3 का मान है :

(A) 15 (B) 9
(C) 51 (D) 3

23. $18\frac{3}{4}$ में कितने $\frac{1}{2}$ हैं ?

(A) 522 (B) 252
(C) 225 (D) 253

24. – 2 में से – 2 घटाया जाए, तो शेषफल का मान क्या होगा ?

(A) 1 (B) 4
(C) 2 (D) 0

व्याख्यात्मक हल

1. (B) माना कि तीन क्रमागत धनात्मक संख्याएँ क्रमशः $(x-1), (x)$ तथा $(x+1)$ हैं,

तो प्रश्नानुसार,

$$(x-1)^2 + (x)^2 + (x+1)^2 = 365$$
$$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + x^2 + 1 + 2x = 365$$
$$\Rightarrow 3x^2 + 2 = 365$$
$$\Rightarrow 3x^2 = 365 - 2 = 363$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{363}{3} = 121 = (11)^2$$
$$\therefore x = 11$$
$$\therefore x - 1 = 11 - 1 = 10$$
$$x = 11$$

तथा $x + 1 = 11 + 1 = 12$

$\therefore$ अभीष्ट योगफल $= 10 + 11 + 12 = 33$

2. (D) प्रश्नानुसार,

भाजक = भागफल × 10

भाजक = शेषफल × 5

भाजक = $46 \times 5 = 230$

भागफल = $\frac{\text{भाजक}}{10} = \frac{230}{10} = 23$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$= 230 \times 23 + 46$
$= 5290 + 46 = 5336$

3. (C) माना कि चार अभाज्य संख्याएँ आरोही क्रम में क्रमशः a, b, c तथा d हैं,

तो प्रश्नानुसार,

$$a \times b \times c = 455$$

तथा $b \times c \times d = 1729$

$$\therefore \frac{a \times b \times c}{b \times c \times d} = \frac{455}{1729}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{5}{19}$$

अतः सबसे छोटी संख्या = 5 तथा सबसे बड़ी संख्या = 19

4. (A) माना कि संख्याएँ x तथा y हैं, तो प्रश्नानुसार,

$$x + y = 5 \quad ...(i)$$

तथा $x \times y = 6$

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$
$$= (5)^2 - 4 \times 6$$
$$= 25 - 24$$
$$= 1$$
$$x - y = 1 \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से,

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$
$$2x = 6$$
$$\therefore x = \frac{6}{2} = 3$$

समीकरण (i) से, $x + y = 5$

$$\Rightarrow 3 + y = 5$$
$$\therefore y = 5 - 3 = 2$$

पुनः प्रश्नानुसार,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{4+9}{36} = \frac{13}{36}$$

5. (C) संख्याएँ $= x, x + 1$ एवं $x + 2$

$$\therefore 2x + 3x + 3 + 4x + 8 = 191$$
$$\Rightarrow 9x = 191 - 11 = 180$$
$$\Rightarrow x = 20$$

$\therefore$ संख्याएँ = 20, 21 एवं 22

6. (B) सुरक्षित मेज $= \frac{5}{6} \times 108 = 90$

सुरक्षित कुर्सियाँ $= \frac{3}{4} \times 132 = 99$

सुरक्षित जोड़े = 90

7. (D) यदि पहला भाग $= x$ हो

तो दूसरा भाग $= 37 - x$

$$\therefore x \times 5 + (37 - x) \times 11 = 227$$
$$\Rightarrow 5x + 407 - 11x = 227$$
$$\Rightarrow 6x = 407 - 227 = 180$$
$$\Rightarrow x = 30$$

$\therefore$ दूसरा भाग = 7

8. (D) माना कि भारतीय सिपाहियों की संख्या x है।

$\therefore$ यूरोपीय सिपाहियों की संख्या $= 12000 - x$

$$\therefore (12000 - x) \times 1.8 + x \times 1.75$$
$$= 12000 \times \left(1\frac{47}{60}\right)$$
$$\Rightarrow 21600 - 1.8x + 1.75x = 21400$$
$$\Rightarrow -0.05x = -200$$
$$\therefore x = \frac{200}{0.05} = 4000$$

9. (A) माना कि दो संख्याएँ x तथा y हैं

तो प्रश्नानुसार,

$$x + y = 8$$

तथा $x \times y = 15$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy}$$
$$= \frac{8}{15}$$

10. (C) $41\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{125}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{125}{3} \times \frac{6}{1}$

$= 250$

11. (B) माना कि पिता और पुत्र की वर्तमान आयु क्रमशः $5x$ वर्ष तथा $2x$ वर्ष है,

तो प्रश्नानुसार,

$5x \times 2x = 1000$

$\Rightarrow \quad 10x^2 = 1000$

$\Rightarrow \quad x^2 = 100$

$\therefore \quad x = 10$

10 वर्ष बाद पिता की आयु $= 5x + 10$

$= 5 \times 10 + 10$

$= 50 + 10 = 60$ वर्ष

12. (C) 80 एवं 90 के मध्य अभाज्य संख्याएँ $= 83$ एवं 89

$\therefore$ अभीष्ट गुणनफल $= 83 \times 89 = 7387$

13. (D) माना कि पाँच क्रमिक संख्याएँ क्रमशः (a), $(a + 1)$, $(a + 2)$, $(a + 3)$ तथा $(a + 4)$ हैं।

तो $S = (a) + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4)$

$= 5a + 10$

$\Rightarrow \quad 5a = S - 10 \quad \therefore \quad a = \frac{S-10}{5}$

$\therefore$ सबसे बड़ा पूर्णांक $= a + 4$

$= \frac{S-10}{5} + 4$

$= \frac{S-10+20}{5}$

$= \frac{S+10}{5}$

14. (A) $p + q = 10$

संभव जोड़े $= (1, 9); (3, 7)$

15. (A) $(122)^{173}$ के गुणनफल में एकक अंक

$= (2)^{173}$ में एकक अंक

$= (2)^{172 + 1}$ में एकक अंक

[$\because$ प्रत्येक 4 घात के बाद इकाई का अंक दोहराया जाता है।]

$= (2)^1$ में एकक अंक $= 2$

16. (B) $\because$ 10005, 345 से पूर्णतः विभाजित होती है।

अतः अभीष्ट सबसे छोटी संख्या

$= 10005 - 999 = 6$

17. (D) $(124)^{372} + (124)^{373}$

$= (124)^{372}\,[1 + 124]$

$= \left[(124)^4\right]^{93} \times 125$

$= (124)^{372} \times 125$

$\therefore$ अभीष्ट एकक अंक

$= (4)^4 \times 125$ का एकक अंक

$= 6 \times 5 = 30$

अतः अभीष्ट अंक $= 0$

18. (C) प्रश्नानुसार,

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{ab} = 1$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = ab$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 - ab = 0$

$\therefore \quad a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 + b^2 - ab)$

$= (a + b) \times 0 = 0$

19. (D) $16 \times 12 - 672 \div 21 = ? - 211$

$? = 16 \times 12 - 672 \div 21 + 211$

$= 192 - 32 + 211 = 371$

20. (A) $? = \frac{214344}{916 \times 3}$

$= \frac{71448}{916} = 78$

21. (B) $999\frac{995}{999} \times 999$

$= \frac{999 \times 999 + 995}{999} \times 999$

$= 998001 + 995$

$= 998996$

22. (A) $a \times b = a + b + \frac{a}{b}$

$9 \times 3 = 9 + 3 + \frac{9}{3}$

$= 12 + 3 = 15$

23. (C) $18\frac{3}{4}$ में कितने $\frac{1}{12}$

$= \frac{75}{4} \div \frac{1}{12}$

$= \frac{75}{4} \times 12 = 225$

24. (D) $-2 - (-2) = -2 + 2$

$= 0$

❑❑